Hinweise zur Rückführung der Subtraktion auf eine Addition unter Verwendung des B-Komplements

(Version vom 02.07.2010)
siehe auch Vorlesungsskript Prof. H.-P. Bauer, Kapitel 6.3.2
bzw. „Übersicht Digitaltechnik“, Kapitel 6, W. Dankmeier

Jede Subtraktion ist durch die Operation

Differenz = Minuend – Subtrahend oder **D = M - S**

definiert. Sie läuft in jedem polyadischen Zahlensystem zur Basis B formal genauso ab, wie wir es vom **Zehnersystem** her kennen. In der Digitaltechnik führt man die Subtraktion des als positiv aufgefassten Subtrahenden S aus Gründen der technischen Vereinfachung aber oft auf die Addition seiner als negative Zahl dargestellten Form zurück, da man dann mit nur einem Addierwerk alle Grundrechenarten und damit alle elementaren Funktionen exakt oder als Näherungen ausführen kann.

1 Das allgemeine Verfahren für Zahlen zur Basis B

Das Verfahren subtrahiert nicht die positive Zahl S von der positiven Zahl M, sondern addiert S als negative Zahl zu M. Zur Darstellung einer (ganzen) negativen Zahl S eignet sich dabei ihr B-Komplement. Zunächst stellt man fest, welche der beiden Zahlen M und S die größere Stellenzahl besitzt und bezeichnet diese mit n. Das B-Komplement zu S ist dann die Zahl $(B^n - S)$. **Beispiel:**

$M = 96_{10}$
$S = 73_{10}$.

M und S haben je zwei Stellen, also ist n = 2, $B = 10^2 = 100$ und das B-Komplement

$B^2 - S = 100 – 73 = 27$.

Die Differenz D zur Zahl M = 96 wird damit bei gewohnter Rechnung

$D = M – S = 96 – 73 = 23$.

Erweiterung mit B^2 ergibt:

$D = M - 73 + B^2 – B^2 = M + (B^2 – 73) – B^2 = 96 + 27 – 100 = 123 – 100 = 23$.

Im Hexadezimalsystem funktioniert es genauso:

$S = 49_{16}$ $(= 73_{10})$

$B = 10_{16}$ $(=16_{10})$

$B^2 = 100_{16}$ $(= 256_{10})$

$M = 60_{16}$ $(= 96_{10})$

$D = M – S$ $= 60_{16} – 49_{16}$ $= 60_{16} + (100_{16} – 49_{16}) – 100_{16}$

$= 60_{16} + B7_{16} – 100_{16}$ $= B7_{16} – 100_{16}$

$= 117_{16} – 100_{16}$ $= 17_{16}$ $= 23_{10}$

Man addiert also zum Minuenden M das B-Komplement (B^n - S) des Subtrahenden S und lässt scheinbar den Übertrag (= linke Stelle) in 117_{16} weg. Wegen der tatsächlichen Subtraktion von 100_{16} ist dies aber zugleich die **exakte Differenz**, nur eben besonders einfach erzielt.

Aber: Ein Übertrag entsteht bei der Addition des B-Komplements (B^n – S) zum Minuenden M **nur**, wenn M größer als S und damit die Differenz D = M – S positiv ist. Andernfalls erhält man als Differenz eine negative Zahl in der B-Komplement-Darstellung

$$B^n – D$$

Der Betrag von D kann hier seinerseits durch B-Komplement-Bildung ermittelt werden:

$$B^n - (B^n – D) = D.$$

Im **Beispiel** mit den vorher verwendeten, aber nun vertauschten Zahlen

$S = 96_{10}$
$M = 73_{10}$

sieht das bei gewohnter Rechnung so aus:

$$D = M – S = 73 – 96 = -23.$$

Die Erweiterung mit B^2 ergibt

$$D = M - S + B^2 – B^2 = M + (B^2 – S) – B^2 = 73 + (100 – 96) -100 = 73 + 4 -100 = 77 -100.$$

Die Addition

$$M + (B^2 – 96) = 73 + 4 = 77$$

erzeugt hier **keinen Übertrag**. Dies ist das Kennzeichen, dass es sich um das B-Komplement der negativen Zahl -23 handelt. Um deren **Betrag** 23 zu ermitteln, muss man „rückkomplementieren“:

$$|D| = B^2 - [M + (B^2 - S)] = S - M$$

$$|D| = 96 - 73 = 23 \quad .$$

Das gleiche im Hexadezimalssystem:

$S = 60_{16}$ $(= 96_{10})$

$B = 10_{16}$ $(=16_{10})$

$B^2 = 100_{16}$ $(= 256_{10})$

$M = 49_{16}$ $(= 73_{10})$

$D = M – S = 49_{16} – 60_{16} = 49_{16} + (100_{16} – 60_{16}) – 100_{16} =$

$= 49_{16} + A0_{16} – 100_{16} = E9_{16} – 100_{16}$

Der fehlende Übertrag bei $49_{16} + A0_{16\ T} = E9_{16}$ verweist auf ein negatives Ergebnis. Nach Rückkomplementieren von $E9_{16}$ erhält man

$$|D| = 100_{16} - E9_{16} = 17_{16} = 23_{10} \quad .$$

Das gesamte Verfahren ist im Skript von Prof. Bauer kompakt als nützliche Merkregel etwa so zusammengefasst:

- B-Komplementbildung für den Subtrahenden S
- Addition zum Minuenden M
- Wenn Übertrag = 1: Differenz D positiv → Wegstreichen des Übertrags
- Wenn Übertrag = 0: Differenz D negativ → Betrag $|D|$ der Differenz ist ihr B-Komplement

2 Sonderfall Dualzahlen: B-Komplement-Bildung über das (B-1)-Komplement

Beim allgemeinen Verfahren bleibt als Nachteil bestehen, dass bei der B-Komplementbildung weiterhin stellenweise die Differenz zum 1er-Wert der nächsthöherwertigen Stelle zu bestimmen ist, was auch das „Borgen" erforderlich machen kann. Das trifft zwar ebenfalls zu, wenn man mit Dualzahlen rechnet, wegen deren speziellen Eigenschaften lässt sich dies aber besonders einfach durchführen, wenn man als Zwischenschritt das (B-1)-Komplement des Subtrahenden einzieht. Hierbei werden die Binärstellen einzeln negiert. Das B-Komplement ergibt sich dann aus diesem Zwischenergebnis durch Addition von 1. Den Grund ersieht man aus folgenden Verfahrensschritten:

$$\begin{aligned} D &= M - S \\ &= M - S + B^n - B^n &&= M + (B^n - S) - B^n \\ &= M - S + (B^n - 1) + 1 - (B^n - 1) - 1 &&= M + (B^n - 1 - S) + 1 - B^n \end{aligned}$$

Für n-stellige Dualzahlen ist immer

B^n = 1000...0000 (n+1 Stellen)

$B^n - 1$ = 111...1111 (n Stellen)

Die weiterhin notwendige Subtraktion ($B^n - 1 - S$) zur Bildung des (B-1)-Komplements ist im Dualsystem allerdings gleichbedeutend mit der stellenweisen Negation des Subtrahenden und damit auf einfachste Weise auszuführen. Beispiel für n = 6 und S = 01011:

$B^6 - 1$ = 111 111

$(B^6 - 1) - S$ = 111 111
-001 011
____
110 100

$S = 73_{10} = 49_{16} = 0100\ 1001_2 = 100\ 1001$

Für die B-Komplement-Bildung ist jetzt nur noch die Addition von 1 erforderlich.

Beispiel mit den zuvor verwendeten Zahlen:

$S = 73_{10} \quad = 49_{16} \quad = 0100\ 1001_2 \quad = 100\ 1001$
$M = 96_{10} \quad = 60_{16} \quad = 0110\ 0000_2 \quad = 110\ 0000$

(B-1)-Komplement von S:

(B-1) – S = 011 0110

B-Komplement von S:

$$\begin{array}{lr} \text{(B-1) – S} & = 011\ 0110 \\ & +\qquad 1 \\ \hline & 011\ 0111 \end{array} \qquad = 37_{16} \qquad = 55_{10}$$

Kontrolle: 55_{10} ist das B-Komplement zu 73_{10} bezüglich $2^7 = 128_{10} = 100\ 0000_2$, da

$55_{10} + 73_{10} = 128_{10}$

Der weitere Ablauf erfolgt nach dem allgemeinen Verfahren:

$$\begin{array}{lr} D = M + (B^n - S) - B^n = & 110\ 0000 \\ & +011\ 0111 \\ \hline & 1001\ 0111 \\ & -1000\ 0000 \end{array}$$

Bei der Addition ist ein Übertrag entstanden, der durch die Subtraktion von 1000 0000 wieder verschwindet (= Wegstreichen). Man erhält das positive Ergebnis:

$D = 1\ 0111_2 = 23_{10}$.

Für ein Beispiel mit negativem Ergebnis kann man die zuvor verwendeten Zahlen vertauschen:

$M = 73_{10} \quad = 49_{16} \quad = 0100\ 1001_2 \quad = 100\ 1001$
$S = 96_{10} \quad = 60_{16} \quad = 0110\ 0000_2 \quad = 110\ 0000$

Bei der Addition des B-Komplements entsteht kein Übertrag:

(B-1)-Komplement von S:

(B-1) – S = 001 1111

B-Komplement von S:

$$\begin{array}{lr} \text{(B-1) – S} & = 001\ 1111 \\ & +\qquad 1 \\ \hline & 010\ 0000 \end{array} \qquad = 20_{16} \qquad = 32_{10}$$

32_{10} ist das B-Komplement zu 96_{10} bezüglich $2^7 = 128_{10}$.

Der weitere Ablauf:

$$
\begin{array}{rl}
D = M + (B^n - S) - B^n = & 100\ 1001 \\
& +010\ 0000 \\
\hline
& 110\ 1001 \quad = 105_{10}
\end{array}
$$

Der fehlende Übertrag verweist auf ein negatives Ergebnis. Der Betrag $|D|$ entsteht hieraus durch Rückkomplementieren in zwei Schritten:

Erst (B-1)-Komplement durch stellenweise Negation, danach B-Komplement durch Addition von 1:

$$
\begin{array}{rl}
|D| & = 001\ 0110 \\
& +\qquad\quad 1 \\
\hline
& \ \ 001\ 0111 \quad = 23_{10}
\end{array}
$$

23_{10} ist das B-Komplement von 105_{10} bezüglich $2^7 = 100\ 0000_2$.

3 Sonderfall: Subtraktion von Hexadezimal- oder Oktalzahlen und Darstellung negativer Zahlen

Im Rahmen der Digitaltechnik können Zahlen jeder Basis B in Dualzahlen mit der Basis B = 2 gewandelt und weiterverarbeitet werden. Dann lässt sich unter anderem auch die Subtraktion ausführen. Das Ergebnis wandelt man anschließend wieder in die Zahl zur Ausgangsbasis zurück. Die Konstruktion der erforderlichen Codewandler- und Dualzahlen-Addier-Schaltungen wurde in der Veranstaltung „Digitaltechnik“ durchgesprochen.

Hat man Hexadezimal- oder Oktal-Zahlen von Hand zu subtrahieren, ist es vorteilhaft, die Hex- bzw. Oktal-Ziffern zunächst als Dualzahlen darzustellen. Schreibt man die sich dabei ergebenden Tetraden (Vierergruppen) bzw. Triaden (Dreiergruppen) in ihrer Reihenfolge hintereinander, so liegt damit unmittelbar die Dualzahl vor. **Beispiel:**

$S = AD_{16} \quad = 1010\ 1101_2 \quad = 173_{10}$

$M = 9E_{16} \quad = 1001\ 1110_2 \quad = 158_{10}$

Nun können die vorgesehenen Rechenoperationen im Dual-System nach dem in Kapitel 2 beschriebenen Verfahren durchgeführt werden, z. B. die Subtraktion:

$$
\begin{array}{rl}
D = M - S & = 1001\ \ 1110 \\
& \ \ +0101\ \ 0010 \\
& \ \ +\qquad\qquad 1 \\
\hline
& \quad 1111\ \ 0001
\end{array}
$$

Es entstand kein Übertrag, daher ist das Ergebnis negativ. Rückkomplementieren und Rückwandeln ergibt den Betrag:

$|D| \quad = 0000\ 1110 + 1 \quad = 0000\ 1111 \ = \ 0F_{16} \quad = \ 15_{10}$

bzw. $D \quad = -0F_{16} \quad = -15_{10}$

Dieser Ablauf beinhaltet auch die Darstellung des Subtrahenden AD_{16} als **negative Zahl** im B-Komplement:

B-Komplement zu S bezüglich 100_{16} : 0101 $0011_2 = 53_{16}$

53_{16} ist das Komplement von AD_{16} bezüglich $100_{16} = 256_{10}$.

4 Sonderfall BCD-Code

Dezimalzahlen lassen sich unter anderem als Folge von Dezimalziffern im BCD-Code über binäre Tetraden darstellen und verarbeiten, siehe Kapitel 7.2.2 im Skript Prof. Bauer. Bei der dezimalstellenweisen Addition können dabei **Pseudotetraden** auftreten, die einen Übertrag in die nächsthöhere Dezimalstelle (=Tetrade) signalisieren. Um diesen Übertrag aus der Pseudotetrade herauszunehmen und wieder eine zulässige Tetrade zu erhalten, muss man einfach die binäre

$6_{10} = 0110_2$

zur Pseudotetrade addieren. Beispiel:

$54_{10} = 0101_{BCD}\ 0100_{BCD}$

Addition von

$38_{10} = 0011_{BCD}\ 1000_{BCD}$

ergibt

$54_{10} + 38_{10} = 0111_{BCD}\ 1100_{Pseudo\text{-}Tetrade}$

Die rechte Binärgruppe ist eine Pseudotetrade. Durch Addition von 0110_{BCD} wird sie in die beiden Tetraden

$$\begin{array}{ll} & 1100_{Pseudo\text{-}Tetrade} \\ & +0110 \\ \hline 0001_{BCD} & 0010_{BCD} \end{array}$$

gewandelt. Die Übertrags-Tetrade 0001_{BCD} muss - wie üblich - zu den beiden linken Tetraden addiert werden:

$$\begin{array}{r} 0101_{BCD} \\ +\ 0011_{BCD} \\ +\ 0001_{BCD} \\ \hline 1001_{BCD} \end{array}$$

Das Gesamtergebnis der Addition ist nun

$1001_{BCD}\ 0010_{BCD} = 92_{10}$.